ANÁLISIS NUMÉRICO I — Examen Final

23 de Febrero de 2022

Nombre	Carrera	Condición

PARTE PRÁCTICA

1. Sea S una constante positiva y $g(x) = 2x - Sx^2$.

   a) Mostrar que si la iteración de punto fijo converge a un límite no nulo, entonces el límite es $x^* = 1/S$ (por lo tanto, el inverso de un número puede ser encontrado solo con multiplicaciones y sustracciones).

   b) Encontrar un intervalo alrededor de $1/S$ para el cual la iteración de punto fijo converge si el punto inicial x_0 pertenece a ese intervalo.

2. Estimar el error que se comete en aproximar $\ln(100.5)$ mediante el polinomio interpolante de $\ln(x)$ en los nodos 100, 101, 102, 103.

3. Si el crecimiento de un pez está modelado por la siguiente ecuación en función de su tiempo de vida

$$L(t) = L_m(1 - ce^{-k(t-t_0)}),$$

   estimar, usando cuadrados mínimos, la longitud del pez a los 5 años si se tienen los siguientes datos: $L_m = 50,\ t_0 = -0.2$ y las mediciones de la longitud del pez durante 4 años

t (años)	1	2	3	4
$L(t)$ (longitud)	22.55	33.35	39.90	43.88

   (Ayuda: utilizar un cambio de variables adecuado).

4. Decidir si la siguiente afirmación es verdadera o falsa y justificar la respuesta:

   Supongamos que la regla de cuadratura

$$I_n(f) = \sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j), \quad n \geq 1,$$

   es una aproximación de $I(f) = \displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)dx$ y es exacta para todos los polinomios de grado menor o igual a 1. Entonces

$$\sum_{j=0}^{n} w_j = 1.$$

PARTE TEÓRICA

Responder con claridad y precisión cada uno de los siguientes items.

1. Dar la definición de convergencia cuadrática para una sucesión de números reales.

2. Describir en qué consiste el método de la secante. Dar sus ventajas y desventajas.

3. Dar la definición de conjunto ortogonal de funciones con respecto a una función de peso en un intervalo $[a, b]$. Demostrar que si $\{\phi_0, \ldots, \phi_n\}$ son ortogonales entonces son linealmente independientes.

EJERCICIO PARA ALUMNOS LIBRES

1. Aproxime la integral $\displaystyle\int_{-1}^{1} 8x^4dx$ utilizando la regla del punto medio en los subintervalos $[-1, 0]$ y $[0, 1]$.